

西北大学学报（自然科学版）
2010年10月，第40卷第5期，Oct.，2010，Vol.40，No.5
Journal of Northwest University（Natural Science Edition）

关于Smarandache函数及Smarandache LCM函数的混合均值

杨明顺

（渭南师范学院 数学系，陕西 渭南 714000）

摘要：目的 研究一个包含Smarandache函数 $S(n)$ 及Smarandache LCM函数 $SL(n)$ 的混合均值问题。方法 利用初等及解析方法以及组合技巧。结果 证明了在一个给定区间 $[1, x]$ 上，满足 $S(n) \neq SL(n)$ 的正整数的个数与 x 相比，是一个高阶无穷小。给出了一个混合均值公式。结论 函数 $S(n)$ 与 $SL(n)$ 的值几乎处处相等。

关 键 词：Smarandache函数；Smarandache LCM函数；最大素因子；混合均值；渐近公式
中图分类号：O156.4 文献标识码：A 文章编号：1000-274X（2010）05-0772-03

On the hybrid mean value of the Smarandache function and the Smarandache LCM function

YANG Ming-shun

（Department of Mathematics, Weinan Teacher Weinan Teacher's University, Weinan 714000, China）

Abstract: Aim To study a hybrid mean value problem involving the Smarandache function $S(n)$ and the Smarandache LCM function $SL(n)$. Methods Using the elementary and analytic methods and some combinational skill. Results It was proved that in the interval $[1, x]$, $\sum_{n \leq x, S(n) \neq SL(n)} 1 = o(x)$. Given an interesting hybrid mean value formula. Conclusion This shows that the value of $S(n)$ is almost equal to $SL(n)$.

Key words: Smarandache function; Smarandache LCM function; the largest prime divisor; hybrid mean value; asmptotic formula

1 引言及结论

对任意正整数 n，著名的Smarandache函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$。即就是 $S(n) = \min\{m: m \in \mathbb{N}, n \mid m!\}$，而Smarandache LCM函数 $SL(n)$ 定义为最小正整数 k 使得 $n \mid [1, 2, \cdots, k]$，$[1, 2, \cdots, k]$ 表示 $1, 2, \cdots, k$ 的最小公倍数。关于这两个函数的性质，许多学者进行了研究，并取得了不少重要的结果[1-6]。例如：文献[6]研究了 $SL(n)$ 的值分布问题，证明了渐近公式

$$\sum_{n \leq x} (SL(n) - P(n))^2 = \frac{2}{5} \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子。

文献[6]讨论了方程 $SL(n) = S(n)$ 的可解性，并完全解决了该问题。即证明了：任何满足该方程的正整数可表示为 $n = 12$ 或者 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_r, p$ 是不同的素数且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是满足 $p > p_i^{\alpha_i}$（$i = 1, 2, \cdots, r$）的正整数。

本文的主要目的是利用初等及组合方法研究混合均值

收稿日期：2010-03-01
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671155）；陕西省教育厅基金资助项目（09JK432）；陕西省科技厅基金资助项目（08A.b22）
作者简介：杨明顺，男，渭南师范学院副教授，从事基础数学的教学与研究。

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)} \tag{1}$$

的渐近性质。这一问题是有意义的，因为式（1）的渐近性反映了这两个函数值分布的规律性，如果渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)} \sim x$$

成立，那么就可以断定函数 $S(n)$ 与 $SL(n)$ 的值几乎处处相等！本文针对这一问题进行了研究，并证明了它的正确性。具体地说即证明了下面两个的结论。

定理 1　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)} = x + O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right)。$$

定理 2　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{P(n)}{SL(n)} = x + O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right)。$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子。

显然定理中的误差项是非常弱的，即误差项与主项仅差一个 $\frac{\ln\ln x}{\ln x}$ 因子，是否存在一个较强的渐近公式也是一个有趣的问题。

2　定理的证明

这节将直接给出定理的证明。只证明定理 1，类似地，也可以推出定理 2。事实上经过简单变形立刻得到

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)} = \sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)-SL(n)}{SL(n)} + \sum_{n\leqslant x}1 = x + O\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}\right)。 \tag{2}$$

现在利用函数 $S(n)$ 及 $SL(n)$ 的性质以及初等与组合方法来估计式（2）中的误差项。由 $SL(n)$ 的性质知当 n 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时有

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}。$$

若 $SL(n)$ 为素数 p，那么 $S(n)$ 也为素数 p。因此，在这种情况下有 $SL(n)-S(n)=0$。所以在式（2）的误差项中，所有非零项必出现在那些使 $SL(n)$ 不等于素数的整数 n 中。即

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\} \equiv p^\alpha,\ \alpha\geqslant 2。$$

设 A 为区间 $[1, x]$ 中所有满足上式条件 n 的集合，对任意 $n\in A$，设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} = p^\alpha\cdot n_1$，其中 $(p, n_1) = 1$。现在分两种情况讨论：设 $A = B + C$，其中 $n\in B$ 如果 $SL(n) = p^\alpha \geqslant \frac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}$；$n\in C$ 如果 $SL(n) = p^\alpha < \frac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}$。于是有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)} = \sum_{n\in B}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)} + \sum_{n\in C}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)} \leqslant \sum_{n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\ \sum_{\substack{\frac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}\leqslant p^\alpha\leqslant\frac{x}{n}\\ \alpha\geqslant 2}} 1 + \sum_{n\in C}1 \equiv R_1 + R_2。 \tag{3}$$

现在分别估计式（3）中的各项。首先估计 R_1。注意到 $p^\alpha\leqslant \ln^4 x$ 时有 $\alpha\leqslant 4\ln\ln x$。于是由素数定理有

$$R_1 \leqslant \sum_{n\leqslant\frac{x}{\ln^4 x}}\ \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\frac{x}{n}\\ \alpha\geqslant 2}} 1 + \sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leqslant n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\ \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\frac{x}{n}\\ \alpha\geqslant 2}} 1 \ll$$

$$\sum_{n\leqslant\frac{x}{\ln^4 x}}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}\ \sum_{\alpha\leqslant\ln x} 1 + \sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leqslant n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}\ \sum_{\alpha\leqslant 4\ln\ln x} 1 \ll$$

$$\sum_{n\leqslant\frac{x}{\ln^4 x}}\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{\ln x}{\ln\ln x} + \sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leqslant n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\sqrt{\frac{x}{n}} \ll$$

$$\frac{x\ln\ln x}{\ln x}。 \tag{4}$$

现在估计 R_2，注意到集合 C 中包含元素的个数不会超过整数 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 的个数，其中 $\alpha_i\leqslant 2\ln\ln x$，$p_i\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}$，$i=1, 2, \cdots$。于是注意到素数分布公式

$$\sum_{p\leqslant y}\ln p = y + O\left(\frac{y}{\ln y}\right),\quad -\ln\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)\sim\frac{1}{\ln p},$$

有

$$R_2 = \sum_{n\in C}1 \leqslant \prod_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\left(\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant 2\ln\ln x}p^\alpha\right) \leqslant$$

$$\prod_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\frac{p^{2\ln\ln x}}{1-\frac{1}{\ln p}} \ll$$

$$\prod_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)^{-1}\exp\left(2\ln\ln x\sum_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\ln p\right) \ll$$

$$\exp\left(\frac{3}{4}\ln x + \sum_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\frac{1}{\ln p}\right) \ll \frac{x}{\ln x}, \tag{5}$$

其中 $\exp(y) = e^y$。

结合式（3）、（4）及式（5），推出估计式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)} \ll \frac{x\ln\ln x}{\ln x}。 \tag{6}$$

利用式（2）及式（6）立刻推出渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)} = x + O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right)。$$

于是完成了定理 1的证明。

注意到当 $SL(n) = p$ 为素数时，$S(n) = P(n) = p$，当 $SL(n)$ 不为素数时，$P(n)\leqslant S(n)\leqslant SL(n)$，于是由证明定理 1的方法立刻推出定理 2。

（下转第 **817**页）

[8] 熊成东, 程玲妹, 徐若璞, 等. 丙交酯与聚四亚甲基醚二醇共聚的研究 [J]. 功能高分子学报, 1991, 4(2): 133-138.
[9] PARK S Y, Han D K, Kim S C. Synthesis and characterization of star-shaped PLLA-PEO block copolymers with temperature-sensitive sol-gel transition behavior [J]. Macromolecules, 2001, 34: 8821-8824.
[10] 董团瑞, 叶文婷, 陈亚芍. 微波辐射法合成 L-聚乳酸. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 38(2): 50-53.
[11] BHAW L A, JHURRY D, SPASSKY N, et al. Anionic polymerization of D, L-lactide initiated by lithium diisopropylamide [J]. Polymer, 2001, 42(24): 9651-9656.
[12] HOOGSTEEN W, POSTEMA A R, PENNINGS A J, et al. Crystal structure, conformation, and morphology of solution-spun poly(L-lactide) fibers [J]. Macromolecules, 1990, 23: 634-642.
[13] XU H, TENG C, YU M. Improvements of thermal property and crystallization behaviour of PLLA based multiblock copolymer by forming stereocomplex with PDLA oligomer [J]. Polymer, 2006, 47: 3922-3928.
[14] IKADA Y, JAMSHIDI K, TSUJI H, et al. Stereocomplex formation between enantiomeric poly(lactides) [J]. Macromolecules, 1987, 20: 904-906.
[15] COSTANZO E M, WU W, VANOSS C J. Comparison between direct contact angle measurements and thin layer wicking on synthetic monosized cuboid hematite particles [J]. Langmuir, 1995, 11: 1827-1830.
[16] 汪朝阳, 赵耀明. 生物降解材料聚乳酸的改性 [J]. 合成树脂及塑料, 2004, 21(4): 79-81.

(编　辑　陈镱文)

(上接第 773页)

参考文献:

[1] 张文鹏. 关于 F. Smarandache函数的两个问题 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2008, 38(2): 173-176.
[2] CHEN Jian-bin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15-18.
[3] MURTHY A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.
[4] LE Mao-hua. Two function equations [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.
[5] GORSKI D. The pseudo-Smarandache functions [J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 12: 140-145.
[6] SANDOR J. On additive analogues of certain arithmetic function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 13: 128-132.
[7] GORSKI D. The pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.
[8] KASHIHARA K. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. Erhus University Press Vail, AZ, USA, 1996.
[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 陕西: 陕西师范大学出版社, 2007.
[10] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

(编　辑　亢小玉)